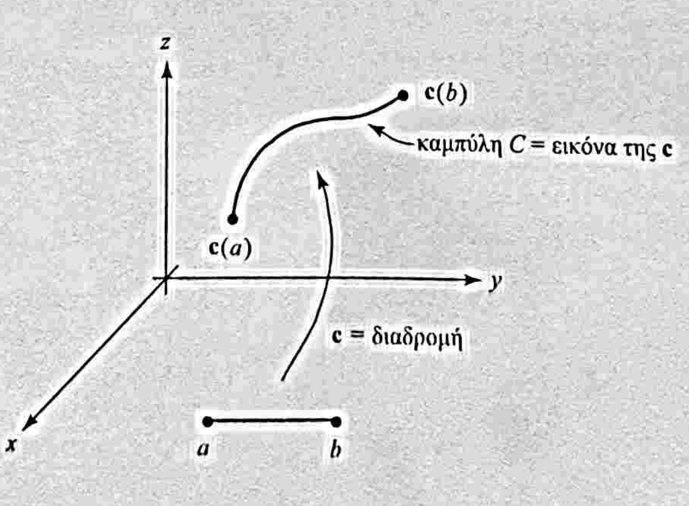
2.4 Εισαγωγή στις διαδρομές και τις καμπύλες

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε τη βασική γεωμετρία και κάποιες υπολογιστικές μεθόδους για τις διαδρομές στο επίπεδο και στον χώρο. Θα παίξουν σημαντικό ρόλο στον κανόνα της αλυσίδας, με τον οποίο θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα. Θα επανέλθουμε στις διαδρομές, εξετάζοντας επιπλέον ζητήματα, στο Κεφάλαιο 4.

Διαδρομές και καμπύλες

Συνήθως φανταζόμαστε μια καμπύλη σαν μια γραμμή σχεδιασμένη σε ένα χαρτί, όπως μια ευθεία, έναν κύκλο ή μια ημιτονοειδή καμπύλη. Είναι χρήσιμο να φανταστούμε μαθηματικά μια καμπύλη C ως το σύνολο των τιμών μιας συνάρτησης που απεικονίζει ένα διάστημα πραγματικών αριθμών στο επίπεδο ή στον χώρο. Θα καλούμε μια τέτοια απεικόνιση ***διαδρομή***. Συνήθως συμβολίζουμε μια διαδρομή με $\mathbf{c}$. Η εικόνα C μιας διαδρομής αντιστοιχεί στην καμπύλη που βλέπουμε στο χαρτί (βλ. Σχήμα 2.4.1). Συνήθως συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με t και τη φανταζόμαστε ως *χρόνο*, οπότε $\mathbf{c}(t)$ είναι η θέση



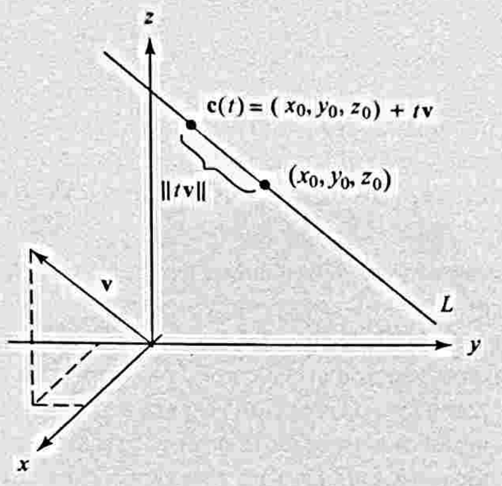
Σχήμα 2.4.1 Η απεικόνιση **c** είναι η διαδρομή. Η εικόνα C της διαδρομής είναι η καμπύλη που «βλέπουμε».

τη χρονική στιγμή t ενός κινούμενου σωματιδίου, το οποίο ***διαγράφει*** μια καμπύλη καθώς μεταβάλλεται το t. Λέμε επίσης ότι η $\mathbf{c}$ ***παραμετρικοποιεί*** την C. Μιλώντας αυστηρά, θα έπρεπε να κάνουμε διάκριση μεταξύ του $\mathbf{c}(t)$ ως *σημείου* του χώρου και ως *διανύσματος* με αφετηρία την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 1 Η ευθεία L του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$ είναι η εικόνα της διαδρομής

$$\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$$

για $t \in \mathbb{R}$ (βλ. Σχήμα 2.4.2). Επομένως, η έννοια της καμπύλης περιλαμβάνει τις ευθείες ως ειδικές περιπτώσεις.



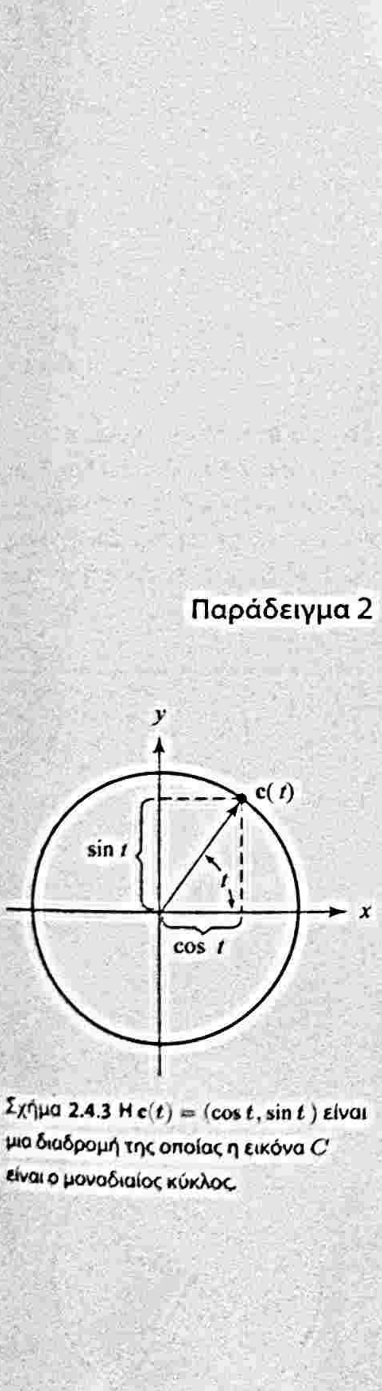
Σχήμα 2.4.2 Η L είναι η ευθεία του χώρου που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) κατά την κατεύθυνση $\mathbf{v}$· η εξίσωσή της είναι $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$.

▲

Παράδειγμα 2 Ο μοναδιαίος κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$ του επιπέδου είναι η εικόνα της διαδρομής

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

(βλ. Σχήμα 2.4.3). Είναι επίσης η εικόνα της διαδρομής $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$. Επομένως, διαφορετικές διαδρομές μπορεί να αποτελούν παραμετρικοποιήσεις της ίδιας καμπύλης. ▲

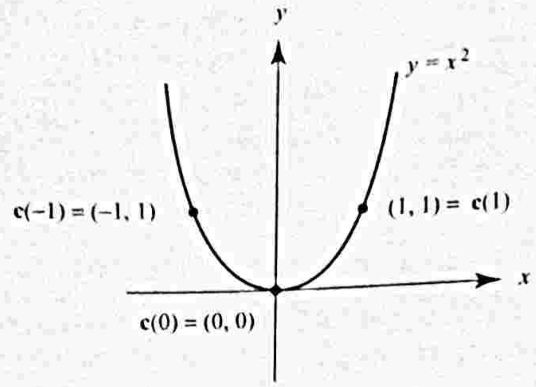


Σχήμα 2.4.3 Η $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι μια διαδρομή της οποίας η εικόνα C είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Διαδρομές και καμπύλες Μια ***διαδρομή*** στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση $\mathbf{c}:[a, b] \to \mathbb{R}^n$. Είναι μια ***διαδρομή στο επίπεδο*** αν $n = 2$, και μια ***διαδρομή στον χώρο*** αν $n = 3$. Το σύνολο C των σημείων $\mathbf{c}(t)$ καθώς το t παίρνει τιμές στο $[a, b]$ καλείται ***καμπύλη***, και τα $\mathbf{c}(a)$ και $\mathbf{c}(b)$ είναι τα ***άκρα*** της. Λέμε ότι η διαδρομή $\mathbf{c}$ ***παραμετρικοποιεί*** την καμπύλη C. Λέμε επίσης ότι η $\mathbf{c}(t)$ ***διαγράφει*** την C καθώς μεταβάλλεται το t.

Αν $\mathbf{c}$ είναι μια διαδρομή στον $\mathbb{R}^3$, γράφουμε $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και καλούμε τις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ ***συνιστώσες συναρτήσεις*** της $\mathbf{c}$. Με αντίστοιχο τρόπο σχηματίζουμε τις συνιστώσες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^2$ ή, γενικά, στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε επίσης διαδρομές με πεδίο ορισμού ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 3 Η διαδρομή $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ διαγράφει ένα παραβολικό τόξο. Η καμπύλη αυτή συμπίπτει με το γράφημα της $f(x) = x^2$ (βλ. Σχήμα 2.4.4).



Σχήμα 2.4.4 Η εικόνα της $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ είναι η παραβολή $y = x^2$.

▲

Παράδειγμα 4 Ένας τροχός ακτίνας R κυλάει προς τα δεξιά κατά μήκος μιας ευθείας με ταχύτητα v. Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους βρείτε τη διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ του σημείου του τροχού που βρίσκεται αρχικά σε απόσταση r κάτω από το κέντρο.

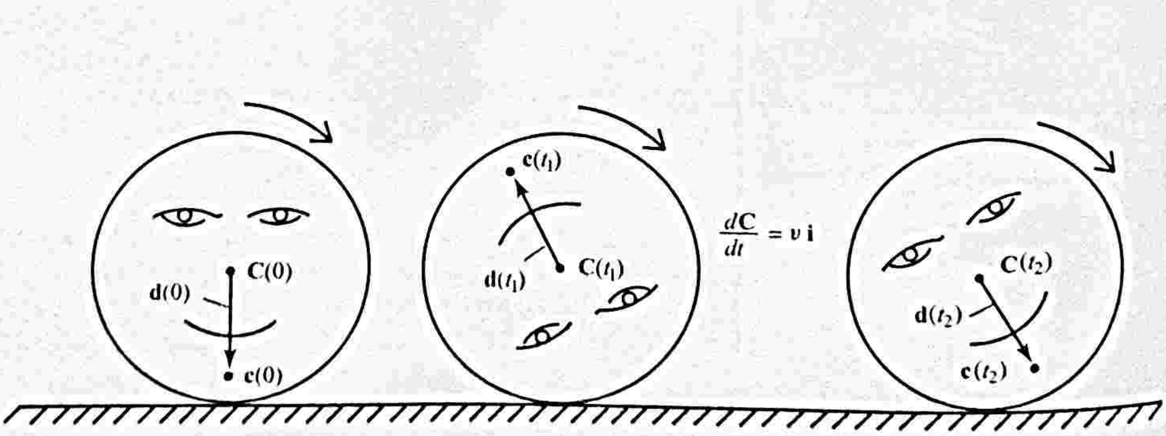
Λύση Τοποθετούμε τον τροχό στο επίπεδο xy με το κέντρο του να βρίσκεται αρχικά στο σημείο $(0, R)$, έτσι ώστε η θέση του κέντρου τη χρονική στιγμή t να δίνεται από τη διαδρομή $\mathbf{C}(t) = (vt, R)$. (Βλ. Σχήμα 2.4.5.)

Η θέση του σημείου $\mathbf{c}(t)$ *ως προς το κέντρο* του τροχού δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) - \mathbf{C}(t)$, που έχει αρχική τιμή $-r\mathbf{j}$ και περιστρέφεται κατά την *ωρολόγια* φορά. Ο ρυθμός περιστροφής είναι τέτοιος ώστε ο τροχός να εκτελεί μια πλήρη περιστροφή όταν το κέντρο διανύει απόσταση $2\pi R$ (ίση με την περιφέρεια του τροχού). Για αυτό απαιτείται χρόνος $2\pi R/v$, άρα η γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt$ του τροχού είναι v/R. Επειδή η περιστροφή γίνεται κατά την ωρολόγια φορά, η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{d}(t)$ είναι της μορφής

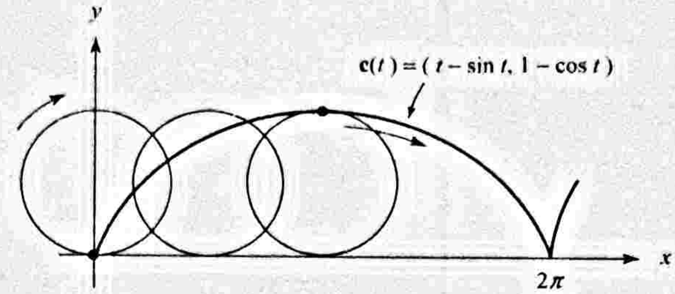
$$\mathbf{d}(t) = r\left(\cos\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{i} + \sin\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{j}\right)$$

για κάποια αρχική γωνία θ. Επειδή $\mathbf{d}(0) = -r\mathbf{j}$, έχουμε $\cos\theta = 0$ και $\sin\theta = -1$, άρα $\theta = -\pi/2$, οπότε

$$\mathbf{d}(t) = r\left(\cos\left[-\frac{v}{R}t - \frac{\pi}{2}\right]\mathbf{i} + \sin\left[-\frac{v}{R}t - \frac{\pi}{2}\right]\mathbf{j}\right).$$



Σχήμα 2.4.5 Το διάνυσμα $\mathbf{d}(t)$ έχει κατεύθυνση από το κέντρο $\mathbf{C}(t)$ του τροχού προς τη θέση $\mathbf{c}(t)$ ενός σημείου του τροχού και περιστρέφεται κατά την ωρολόγια φορά καθώς ο τροχός κινείται προς τα δεξιά.



Σχήμα 2.4.6 Η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της στεφάνης ενός τροχού που κυλάει καλείται κυκλοειδές.

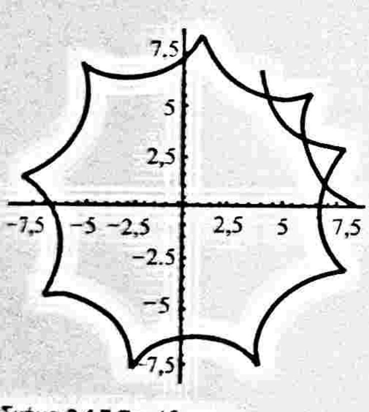
Χρησιμοποιώντας τις $\cos(\varphi - \pi/2) = \sin\varphi$ και $\sin(\varphi - \pi/2) = -\cos\varphi$ μαζί με τις $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ και $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, παίρνουμε

$$\mathbf{d}(t) = r\left(-\sin\frac{vt}{R}\,\mathbf{i} - \cos\frac{vt}{R}\,\mathbf{j}\right).$$

Η διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ προκύπτει τελικά με πρόσθεση των συνιστωσών της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{d}(t)$ στις συντεταγμένες της διαδρομής $\mathbf{C}(t)$. Το αποτέλεσμα είναι

$$\mathbf{c}(t) = \left(vt - r\sin\frac{vt}{R}, R - r\cos\frac{vt}{R}\right).$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $v = R = r = 1$, παίρνουμε $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Η καμπύλη C που αποτελεί την εικόνα αυτής της διαδρομής $\mathbf{c}$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.6 και καλείται ***κυκλοειδές***. ▲



Σχήμα 2.4.7 Παράδειγμα υποκυκλοειδούς.

Το παραπάνω παράδειγμα δεν αφορούσε μόνο τη διαδρομή των σημείων της στεφάνης ενός τροχού που κυλάει κατά μήκος μιας ευθείας. Όταν ο τροχός κυλάει επί ενός κύκλου, η καμπύλη που προκύπτει ονομάζεται ***επίκυκλος***. Πρόκειται για τους επίκυκλους της πτολεμαϊκής θεωρίας που αναφέραμε στην εισαγωγή. Αν ο τροχός βρίσκεται έξω από τον κύκλο και το σημείο πάνω στη στεφάνη, η καμπύλη ονομάζεται ***επικυκλοειδές***, ενώ αν ο τροχός βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου ονομάζεται ***υποκυκλοειδές***. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.7.

Ιστορικό σημείωμα

Ο Γάλλος μαθηματικός Blaise Pascal μελέτησε το κυκλοειδές το 1649 για να ξεχαστεί από έναν έντονο πονόδοντο από τον οποίο υπέφερε. Όταν εξαφανίστηκε ο πόνος, ερμήνευσε την εξαφάνισή του ως σημάδι πως οι σκέψεις του δεν είχαν δυσαρεστήσει τον Θεό. Τα αποτελέσματα του Pascal έδωσαν το ερέθισμα σε άλλους μαθηματικούς να μελετήσουν τη συγκεκριμένη καμπύλη, και ακολούθησε η ανακάλυψη πολυάριθμων αξιοσημείωτων ιδιοτήτων της. Μία από αυτές ανακαλύφθηκε από τον Ολλανδό Christiaan Huygens, ο οποίος τη χρησιμοποίησε στην κατασκευή ενός «τέλειου» ρολογιού με εκκρεμές.

Ταχύτητα και εφαπτόμενες στις διαδρομές

Αν φανταστούμε την $\mathbf{c}(t)$ ως την καμπύλη που διαγράφει ένα σωματίδιο και το t ως χρόνο, είναι λογικό να ορίσουμε το διάνυσμα ταχύτητας ως εξής:

Ορισμός Διάνυσμα ταχύτητας Αν η $\mathbf{c}$ είναι διαδρομή και είναι παραγωγίσιμη, λέμε ότι η $\mathbf{c}$ είναι ***παραγωγίσιμη διαδρομή***. Η ***ταχύτητα*** της $\mathbf{c}$ τη χρονική στιγμή t ορίζεται μέσω της[3]

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

Συνήθως σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{c}'(t)$ έτσι ώστε να έχει την ουρά του στο σημείο $\mathbf{c}(t)$. Το ***μέτρο της ταχύτητας*** της διαδρομής $\mathbf{c}(t)$ είναι $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, δηλαδή το μήκος του διανύσματος ταχύτητας. Αν $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ στον $\mathbb{R}^2$, τότε

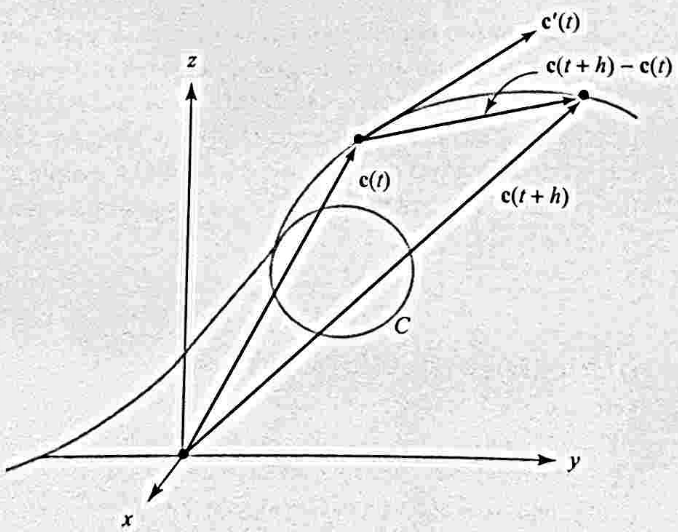
$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

και αν $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Στον παραπάνω ορισμό, $x'(t)$ είναι η παράγωγος dx/dt μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής. Αν ερμηνεύσουμε τα όρια των διανυσμάτων κατά συνιστώσες, οι τύποι για το διάνυσμα ταχύτητας έπονται από τον ορισμό της παραγώγου. Ωστόσο, το όριο μπορεί να ερμηνευτεί και με διανυσματικούς όρους. Στο Σχήμα 2.4.8, βλέπουμε ότι το $[\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)]/h$ τείνει στην εφαπτομένη της διαδρομής καθώς $h \to 0$.

Εφαπτόμενο διάνυσμα Η ταχύτητα $\mathbf{c}'(t)$ είναι ένα διάνυσμα ***εφαπτόμενο*** στη διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ τη χρονική στιγμή t. Αν C είναι η καμπύλη που διαγράφει η $\mathbf{c}$ και η $\mathbf{c}'(t)$ δεν ισούται με $\mathbf{0}$, τότε η $\mathbf{c}'(t)$ είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη C στο σημείο $\mathbf{c}(t)$.



Σχήμα 2.4.8 Το διάνυσμα $\mathbf{c}'(t)$ είναι εφαπτόμενο στη διαδρομή $\mathbf{c}(t)$.

Αν φανταστούμε την παράγωγο $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ σαν πίνακα, θα είναι ένα διάνυσμα-στήλη με στοιχεία τις $x'(t)$, $y'(t)$ και $z'(t)$. Επομένως, η έννοια της παραγώγου που χρησιμοποιούμε εδώ είναι συνεπής με την προηγούμενη έννοια της παραγώγου.

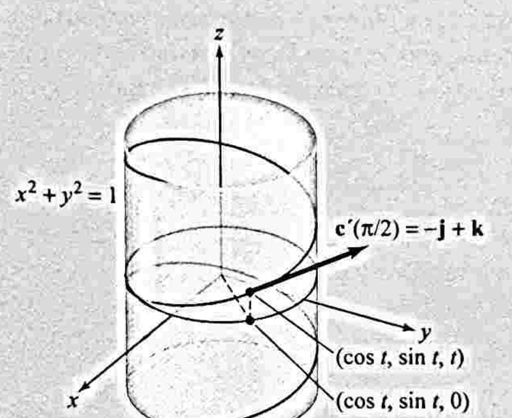
[3]Αν το t βρίσκεται στο άκρο ενός διαστήματος, θα πρέπει, όπως στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, να πάρουμε από δεξιά ή από αριστερά όρια.

Παράδειγμα 5 Υπολογίστε το εφαπτόμενο διάνυσμα της διαδρομής $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ στο $t = 0$.

Λύση Έχουμε $\mathbf{c}'(t) = (1, 2t, e^t)$, οπότε στο $t = 0$ παίρνουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα $(1, 0, 1)$. ▲

Παράδειγμα 6 Περιγράψτε τη διαδρομή $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας στο σημείο της καμπύλης-εικόνας της διαδρομής όπου $t = \pi/2$.

Λύση Για δεδομένο t, το σημείο $(\cos t, \sin t, 0)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ του επιπέδου xy. Άρα το σημείο $(\cos t, \sin t, t)$ βρίσκεται t μονάδες πάνω από το σημείο $(\cos t, \sin t, 0)$ αν το t είναι θετικό και $-t$ μονάδες κάτω από το $(\cos t, \sin t, 0)$ αν το t είναι αρνητικό. Καθώς το t αυξάνεται, το $(\cos t, \sin t, t)$ τυλίγεται γύρω από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ με τη συντεταγμένη z να αυξάνεται. Η καμπύλη που διαγράφει αυτό το σημείο ονομάζεται ***έλικα*** και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.9. Στο $t = \pi/2$, $\mathbf{c}'(\pi/2) = (-\sin \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.



Σχήμα 2.4.9 Η έλικα $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ τυλίγεται γύρω από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

▲

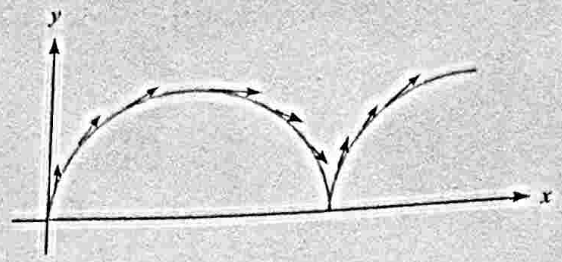
Παράδειγμα 7 Η κυκλοειδής διαδρομή ενός σωματιδίου το οποίο βρίσκεται πάνω στη στεφάνη ενός τροχού με ακτίνα R ο οποίος κυλάει με ταχύτητα v δίνεται από την έκφραση $\mathbf{c}(t) = (vt - R\sin(vt/R), R - R\cos(vt/R))$. (Βλ. Παράδειγμα 4.) Βρείτε την ταχύτητα $\mathbf{c}'(t)$ του σωματιδίου σαν συνάρτηση του t. Πότε μηδενίζεται η ταχύτητα; Είναι ποτέ κατακόρυφο το διάνυσμα ταχύτητας;

Λύση Για να βρούμε την ταχύτητα, παραγωγίζουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\left(vt - R\sin\frac{vt}{R}\right), \frac{d}{dt}\left(R - R\cos\frac{vt}{R}\right)\right)\\ &= \left(v - v\cos\frac{vt}{R}, v\sin\frac{vt}{R}\right).\end{aligned}$$

Με χρήση διανυσματικού συμβολισμού, $\mathbf{c}'(t) = (v - v\cos(vt/R))\mathbf{i} + (v\sin(vt/R))\mathbf{j}$. Η συνιστώσα κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{i}$ είναι $v(1 - \cos(vt/R))$, το οποίο είναι μηδέν όταν το vt/R είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Για αυτές τις τιμές του t, το $\sin(vt/R)$ είναι επίσης μηδέν, άρα οι μόνες χρονικές στιγμές στις οποίες η ταχύτητα είναι μηδέν είναι όταν $t = 2\pi nR/v$ για κάποιον ακέραιο n. Σε αυτές τις χρονικές στιγμές έχουμε $\mathbf{c}(t) = (2\pi nR, 0)$, άρα το κινούμενο σημείο αγγίζει το έδαφος. Αυτές οι στιγμές εμφανίζονται ανά χρονικά διαστήματα $2\pi R/v$ (συχνότερα για μικρούς τροχούς και για τροχούς που κυλούν γρήγορα).

Το διάνυσμα ταχύτητας δεν είναι ποτέ κατακόρυφο, διότι η οριζόντια συνιστώσα μηδενίζεται μόνο όταν μηδενίζεται και η κατακόρυφη συνιστώσα. ▲



Σχήμα 2.4.10 Διανύσματα ταχύτητας της καμπύλης που διαγράφει ένα σημείο της στεφάνης ενός τροχού που κυλάει.

Στο Σχήμα 2.4.10 απεικονίζονται μερικά διανύσματα ταχύτητας επί της κυκλοειδούς διαδρομής του Σχήματος 2.4.6.

Εφαπτόμενη ευθεία

Η εφαπτόμενη ευθεία μιας διαδρομής σε ένα σημείο είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο κατά τη διεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος. Χρησιμοποιώντας τη μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας που διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο και έχει συγκεκριμένη διεύθυνση, παίρνουμε την παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.

Εφαπτόμενη ευθεία σε διαδρομή Αν $\mathbf{c}(t)$ είναι μια διαδρομή και $\mathbf{c}'(t_0) \neq 0$, η εξίσωση της ***εφαπτόμενης ευθείας*** της διαδρομής στο σημείο $\mathbf{c}(t_0)$ είναι

$$l(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Αν C είναι η καμπύλη που διαγράφει η $\mathbf{c}$, τότε η ευθεία που διαγράφει η l είναι η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης C στο $\mathbf{c}(t_0)$.

Προσέξτε ότι γράψαμε την εξίσωση με τέτοιο τρόπο ώστε η l να διέρχεται από το σημείο $\mathbf{c}(t_0)$ για $t = t_0$ (αντί για $t = 0$). Βλ. Σχήμα 2.4.11.

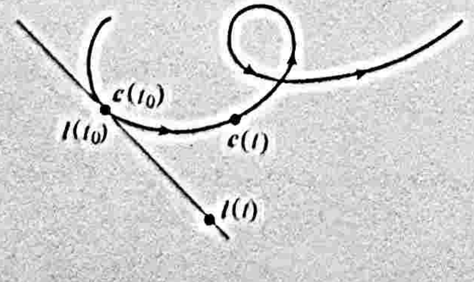
Παράδειγμα 8 Μια διαδρομή στον $\mathbb{R}^3$ διέρχεται από το σημείο $(3, 6, 5)$ για $t = 0$ με εφαπτόμενο διάνυσμα το $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.

Λύση Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$l(t) = (3, 6, 5) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0) = (3 + t, 6 - t, 5).$$

Σε συντεταγμένες (x, y, z), η εφαπτόμενη ευθεία είναι $x = 3 + t$, $y = 6 - t$, $z = 5$. ▲

Από φυσικής πλευράς, η κίνηση κατά μήκος της εφαπτόμενης ευθείας μπορεί να ερμηνευτεί ως η διαδρομή που θα ακολουθούσε ένα σωματίδιο που κινείται επί μιας καμπύλης, αν αφηνόταν ελεύθερο κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.



Σχήμα 2.4.11 Η εφαπτόμενη ευθεία μιας διαδρομής.

Παράδειγμα 9 Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί τη διαδρομή $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ μέχρι να ξεφύγει ακολουθώντας την εφαπτομένη τη στιγμή $t = 1$. Πού θα βρίσκεται τη στιγμή $t = 3$;

Λύση Το διάνυσμα ταχύτητας είναι το $(e^t, -e^{-t}, -\sin t)$, το οποίο για $t = 1$ είναι το διάνυσμα $(e, -1/e, -\sin 1)$. Τη στιγμή $t = 1$ το σωματίδιο βρίσκεται στο $(e, 1/e, \cos 1)$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $l(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t-1)(e, -1/e, -\sin 1)$. Τη στιγμή $t = 3$, η θέση επί αυτής της ευθείας είναι

$$l(3) = \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1\right) + 2\left(e, -\frac{1}{e}, -\sin 1\right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2\sin 1\right)$$
$$\cong (8{,}155, -0{,}368, -1{,}143).$$ ▲

Ασκήσεις

Σχεδιάστε τις καμπύλες που είναι εικόνες των διαδρομών των Ασκήσεων 1 έως 4.

1. $x = \sin t$, $y = 4\cos t$, όπου $0 \le t \le 2\pi$

2. $x = 2\sin t$, $y = 4\cos t$, όπου $0 \le t \le 2\pi$

3. $\mathbf{c}(t) = (2t - 1, t + 2, t)$

4. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, όπου $1 \le t \le 3$

5. Θεωρήστε τον κύκλο C ακτίνας 2, με κέντρο την αρχή των αξόνων.

(α) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C που να έχει αντιωρολόγιο προσανατολισμό και να ξεκινά από το $(2, 0)$.

(β) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C που να έχει ωρολόγιο προσανατολισμό και να ξεκινά από το $(0, 2)$.

(γ) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση του C αν κέντρο του είναι το σημείο $(4, 7)$.

6. Δώστε μια παραμετρικοποίηση για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες:

(α) Την ευθεία που διέρχεται από τα $(1, 2, 3)$ και $(-2, 0, 7)$.

(β) Το γράφημα της $f(x) = x^2$.

(γ) Το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ και $(1, 0)$ (Χωρίστε το σε ευθύγραμμα τμήματα.)

(δ) Την έλλειψη που δίνεται από την $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Στις Ασκήσεις 7 έως 10, βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας της δεδομένης διαδρομής.

7. $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

8. $\mathbf{c}(t) = (\sin 3t)\mathbf{i} + (\cos 3t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$

10. $\mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$

Στις Ασκήσεις 11 έως 14, υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανύσματα της δεδομένης διαδρομής.

11. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$

12. $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$

13. $\mathbf{c}(t) = (t\sin t, 4t)$

14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^2)$

15. Πότε είναι *οριζόντιο* το διάνυσμα ταχύτητας ενός σημείου της στεφάνης ενός τροχού ακτίνας R που κυλάει με ταχύτητα v; Ποια είναι η ταχύτητα σε αυτό το σημείο;

16. Αν η θέση ενός σωματιδίου στον χώρο τη χρονική στιγμή t είναι $(6t, 3t^2, t^3)$, ποιο είναι το διάνυσμα ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή $t = 0$;

Στις Ασκήσεις 17 και 18, βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην κάθε διαδρομή για τη συγκεκριμένη τιμή του t που σας δίνεται.

17. $(\sin 3t, \cos 3t, 2t^{5/2})$, $t = 1$

18. $(\cos^2 t, 3t - t^3, t)$, $t = 0$

Στις Ασκήσεις 19 έως 22, υποθέστε ότι ένα σωματίδιο που ακολουθεί τη δεδομένη διαδρομή $\mathbf{c}(t)$ *ξεφεύγει ακολουθώντας την εφαπτομένη τη χρονική στιγμή* $t = t_0$. *Υπολογίστε τη θέση του σωματιδίου την υποδεικνυόμενη χρονική στιγμή* t_1.

19. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, όπου $t_0 = 2$, $t_1 = 3$

20. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, όπου $t_0 = 1$, $t_1 = 2$

21. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, όπου $t_0 = 0$, $t_1 = 1$

22. $\mathbf{c}(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^3)$, όπου $t_0 = 1$, $t_1 = 2$

23. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματίδιου που κινείται πάνω σε μια έλικα είναι $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$.

(α) Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t_0 = 4\pi$.

(β) Είναι ποτέ το $\mathbf{c}'(t)$ ορθογώνιο με το $\mathbf{c}(t)$;

(γ) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της εφαπτόμενης ευθείας της $\mathbf{c}(t)$ στο $t_0 = 4\pi$.

(δ) Πού θα τέμνει αυτή η ευθεία το επίπεδο xy;

24. Θεωρήστε τη σπείρα που δίνεται από την $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$. Δείξτε ότι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{c}$ και $\mathbf{c}'$ είναι σταθερή.

25. Έστω $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ και $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$.

(α) Βρείτε την $(f \circ \mathbf{c})(t)$.

(β) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $f \circ \mathbf{c}$ στο $t = 1$.